# Continuidad de funciones reales

## Intervalos

En este curso las funciones que vamos a considerar van a estar definidas en intervalos o en uniones de intervalos. Vamos a fijar la notación que vamos a emplear y a recordar los distintos tipos de intervalo.

**Definición.** Un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en $I$ todos los números comprendidos entre ellos dos también están en $I$. El conjunto vacío, Ø, se considera también como un intervalo.

Además de $\mathbb{R}$ y del Ø, hay los siguientes tipos de intervalos.

Intervalos que tienen dos puntos extremos $a$ y $b$ (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$\begin{array}{rcll} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} & \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\ ]a,b[ & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{(intervalo abierto)} \\ [a,b[ & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} & \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)} \\ ]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} & \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)} \end{array}$$

Intervalos que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$\begin{array}{rcll} ]-\infty,c[ & = & \{x \in \mathbb{R} : x < c\} & \text{(semirrecta abierta a la izquierda)} \\ ]-\infty,c] & = & \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} & \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)} \\ ]c,+\infty[ & = & \{x \in \mathbb{R} : x > c\} & \text{(semirrecta abierta a la derecha)} \\ [c,+\infty[ & = & \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant c\} & \text{(semirrecta cerrada a la derecha)} \end{array}$$

## Continuidad

Consideremos una ley física de la forma $P = f(V)$, que relaciona los valores de una "variable independiente $V$" (podemos pensar que es el volumen de un gas) con otra "variable dependiente $P$" (podemos pensar que es la presión). Si queremos usar dicha ley, hemos de medir un valor $V_o$ de la variable $V$, y es inevitable que al hacerlo cometamos algún error el cual, naturalmente, influye en el correspondiente valor de $P$, que ya no será exactamente igual a $P_o = f(V_o)$. Surge así la pregunta natural: ¿de qué forma el error en la medida de $V$ afecta al valor resultante de $P$? Es claro que si para valores de $V$ "muy próximos" a $V_o$ obtengo valores de $P$ muy diferentes entre sí, la ley "$f$" que relaciona $V$ con $P$ no tendrá ninguna utilidad práctica.

Puesto que los errores de medida son inevitables, no es razonable tratar de obtener "el verdadero valor $P_o$". Lo que sí puede hacerse es fijar una cota de error admisible para $P$ (la cual dependerá de cada situación concreta); llamemos "$\varepsilon$" a dicha cota, ($\varepsilon > 0$), y tratar de obtener otra cota de error "$\delta$", ($\delta > 0$), de tal forma que siempre que midamos $V_o$ con un error menor que $\delta$ tengamos la seguridad de que el valor resultante para $P$ se diferencia de $P_o$ en menos que $\varepsilon$. Esto es, $|f(V) - f(V_o)| < \varepsilon$ siempre que $|V - V_o| < \delta$. Cuando esto efectivamente pueda hacerse para cualquier cota de error $\varepsilon > 0$ decimos que la ley "$f$" es continua en $V_o$. Observa que cabe esperar que la cota de error $\delta$ dependa del $\varepsilon > 0$ fijado en cada caso, y también de $V_o$.

Las ideas anteriores conducen, de forma natural, a la definición matemática de continuidad. En todo lo que sigue, la letra $A$ representará un conjunto no vacío de números reales. En la práctica $A$ será siempre un intervalo o una unión de intervalos. Recuerda que la notación $f : A \to \mathbb{R}$ quiere decir que $f$ es una función real cuyo dominio es $A$. Es muy importante advertir que $A$ no tiene por qué coincidir con el dominio natural de la función. Esto es así porque con frecuencia estamos interesados en estudiar propiedades de una función en una parte de su dominio natural. Además, la continuidad de $f$ depende tanto de la "regla que la define" como del conjunto en donde estamos trabajando.

**Definición de continuidad en un punto.** Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es continua en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La definición anterior suele escribirse, con abuso del formalismo lógico, de la siguiente forma:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \quad \left.\begin{array}{c} |x-a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Advierte cómo en esta definición el conjunto $A$ tiene mucho protagonismo: sólo se consideran los valores de $f$ en $A$, lo que le pueda pasara a $f$ fuera de $A$ no nos interesa.

Debes tener claro que para poder hablar de la continuidad o de la no continuidad de una función en un punto, la función debe estar definida en dicho punto. La definición de continuidad exige que el número $f(a)$ esté definido. Si no se conoce el valor de $f$ en $a$ no puede comprobarse si dicha condición se verifica o no y, por ello, no tiene sentido considerar la continuidad de esa función en dicho punto. Insisto en esta evidencia porque en muchos textos te vas a encontrar ejercicios del siguiente estilo:

a) Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 0$.

b) Estudia la continuidad de la función $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ en $x = 0$.

c) Estudia la continuidad de la función $h(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$ en $x = 0$.

Respuesta: Las funciones $f$, $g$ y $h$ no están definidas en 0, por tanto no tiene sentido estudiar su continuidad en 0. Para poder estudiar la continuidad en 0 de estas funciones, primero hay que definirlas en 0. Por ejemplo, podemos definir $f(0)=0$, $g(0)=1$, $h(0)=0$. Ahora la respuesta es: $f$ no es continua en 0, $g$ no es continua en 0 pero es continua por la derecha en 0, y $h$ es continua en 0.

Se dice que $f$ es continua en un subconjunto $C \subseteq A$, si $f$ es continua en todo punto de $C$.

No suele ser tarea fácil demostrar que una función dada es continua. Generalmente, lo que se hace es descomponer la función que queremos estudiar en otras más sencillas cuya continuidad ya es conocida previamente. Es por ello interesante saber qué tipo de operaciones realizadas con funciones continuas conducen a nuevas funciones continuas.

**Propiedades básicas de las funciones continuas.**

Sean $f$, $g$ funciones reales definidas en $A$. Se verifica que:

i) Las funciones $f + g$ y $fg$ son continuas en todo punto de $A$ en el que las dos funciones $f$ y $g$ sean continuas. En particular, las funciones suma y producto de funciones continuas son funciones continuas.

ii) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, la función $\dfrac{1}{g}$ es continua en todo punto de $A$ en el que $g$ sea continua. En consecuencia, la función cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula nunca es una función continua.

Aceptaremos el siguiente resultado:

**Continuidad de las funciones elementales.** Todas las funciones elementales que hemos visto son continuas en sus respectivos dominios de definición.

Además de sumar y multiplicar funciones, también sabemos componerlas. Veamos cómo se comporta la continuidad respecto de la composición de funciones.

**Continuidad de una función compuesta.** Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subseteq B$. Supongamos que $f$ es continua en un punto $a \in A$ y que $g$ es continua en el punto $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $a$. En particular, si $g$ es continua en $f(A)$, entonces $g \circ f$ es continua en todo punto de $A$ en el que $f$ sea continua. Más en particular, la composición de funciones continuas es una función continua.

**Demostración.** Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de $g$ en $f(a)$, existe $\rho > 0$ tal que para todo $y \in B$ con $|y - f(a)| < \rho$ se tiene que $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$. Ahora, por la continuidad de $f$ en $a$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(a)| < \rho$. Deducimos así que $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$. Es decir, la función compuesta $g \circ f$ es continua en $a$.

La continuidad de una función en un punto permite obtener información sobre el comportamiento de la función en los puntos próximos al mismo. Estos resultados se llaman *locales*.

**Conservación local del signo.** Sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua en un punto $a \in A$ con $f(a) \neq 0$. Entonces hay un número $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r$ se verifica que $f(x)f(a) > 0$. (Es decir, $f$ es positiva (si $f(a) > 0$) o negativa (si $f(a) < 0$) en todos los puntos de $A$ que están suficientemente cerca de $a$).

**Demostración.** Supondremos que $f(a) > 0$. Podemos entonces tomar $\varepsilon = f(a)/2$ para obtener, en virtud de la continuidad de $f$ en $a$, un $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < f(a)/2$, lo que implica que $f(x) > f(a)/2 > 0$. El caso en que $f(a) < 0$ se reduce al anterior sin más que sustituir $f$ por $-f$.

Una propiedad muy útil de los *intervalos abiertos* es que permiten *localizar* la continuidad. Para entender esto necesitamos dar una definición.

**Restricción de una función.** Dados una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $C \subset A$, podemos definir *una nueva función*, llamada *restricción de $f$ a $C$*, que se representa por $f_{|C}$ y es la función *definida en el conjunto $C$* que viene dada por $f_{|C}(x) = f(x)$ para todo $x \in C$.

El siguiente resultado expresa que para estudiar la continuidad de una función en un intervalo abierto solamente tenemos que fijarnos en lo que pasa en dicho intervalo.

**Localización de la continuidad.** Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y consideremos un intervalo abierto $I \subset A$. Se verifica entonces que si la función $f_{|I}$ es continua en $I$ entonces $f$ es continua en $I$.

La gráfica de una función continua en un intervalo, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, la imaginamos como una curva continua, por ello, si $f(a) < 0 < f(b)$, la gráfica de $f$ tiene que atravesar el eje de abscisas para pasar de un punto situado por debajo de él a otro que se encuentra por encima y, por tanto, *$f$ tiene que* anularse en algún punto entre $a$ y $b$. Esto es precisamente lo que afirma el conocido *teorema* que sigue.

**Teorema de Bolzano.** Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.

El siguiente resultado expresa la idea de que si una función continua toma dos valores entonces debe tomar todos los valores comprendidos entre ambos.

**Teorema de los valores intermedios.** La imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo.

Dos consecuencias importantes del teorema de Bolzano son las siguientes.

**Existencia de raíces.** Dados $a > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ hay un único número $c > 0$ tal que $c^k = a$.

**Demostración**. La función $f : \mathbb{R}^+_o \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^k - a$, es continua y $f(0) = -a < 0$, $f(1 + a) = (1 + a)^k - a > 0$. Deducimos que hay algún número $c > 0$ tal que $f(c) = 0$. Dicho número es único porque la función $f$ es estrictamente creciente. $\square$

**Ceros de polinomios de grado impar.** Toda función polinómica de grado impar se anula en algún punto.

**Mayorantes, minorantes, máximo y mínimo.**

Sea $E$ un conjunto no vacío de números reales. Un número $z \in \mathbb{R}$ se dice que es un **mayorante o cota superior** (resp. **minorante o cota inferior**) de $E$ si $x \leqslant z$ (resp. $z \leqslant x$) para todo $x \in E$.

Si hay algún elemento de $E$ que también sea mayorante (resp. minorante) de $E$, dicho elemento es necesariamente único y se llama **máximo** (resp. **mínimo**) de $E$ y lo representaremos por $\max(E)$ (resp. $\min(E)$ ).

Un conjunto que tiene algún mayorante (resp. minorante) se dice que está **mayorado o acotado superiormente** (resp. **minorado o acotado inferiormente**). Un conjunto que está mayorado y minorado se dice que está **acotado**.

Está claro que un conjunto puede no tener mínimo ni máximo. Los problemas de "optimización" consisten, justamente, en estudiar condiciones que garanticen la existencia de valores máximos y mínimos para funciones de diversas clases. A este respecto el siguiente resultado es uno de los más importantes. Antes vamos a introducir la terminología que se usa.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Se dice que $f$ está mayorada (resp. minorada) en $A$, si el conjunto $f(A)$ está mayorado (resp. minorado). Se dice que $f$ *está acotada en* $A$ si el conjunto $f(A)$ está acotado. Se dice que $f$ alcanza en $A$ un **máximo** (resp. un **mínimo**) **absoluto** si el conjunto $f(A)$ tiene máximo (resp. mínimo), es decir, existe algún punto $v \in A$ (resp. $u \in A$) tal que $f(x) \leqslant f(v)$ (resp. $f(u) \leqslant f(x)$) para todo $x \in A$.

**Teorema de Weierstrass.** Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.

Si recordamos que la imagen de un intervalo por una función continua es otro intervalo, el teorema anterior nos dice que **la imagen de un intervalo cerrado y acotado por una función continua es otro intervalo cerrado y acotado**. En particular, **toda función continua en un intervalo cerrado y acotado está acotada en dicho intervalo.**